**ЭЛЕКТРОННОЕ ОБУЧЕНИЕ**

Учебные материалы по дисциплине «ОУДп.10 Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»

для учебных групп №11,15,17 на период с 20.04.2020 г по 24.04.2020г.

**Темы учебных занятий:**

* Понятие об определённом интеграле
* Свойства определенного интеграла
* Формула Ньютона—Лейбница
* Пр.р.№65 Выполнение упражнений на вычисление определённого интеграла
* Пр.р.№66 Выполнение упражнений на вычисление определённого интеграла
* Понятие криволинейной трапеции

Для полного освоения теоретической части указанных тем необходимо использовать учебный материал электронной библиотечной системы (ЭБС) IPRBooks

**Адрес сайта ЭБС:** [**http://www.iprbookshop.ru**](http://www.iprbookshop.ru)

**Рекомендованная для использования литература:**

* [Неопределенные и определенные интегралы. Курс лекций](http://www.iprbookshop.ru/46485.html)

Махова Н.Б., Мацур Ф.К.

2015, Московская государственная академия водного транспорта

* [Неопределенные и определенные интегралы. Методические рекомендации](http://www.iprbookshop.ru/46727.html)

Махова Н.Б., Мацур Ф.К.

2010, Московская государственная академия водного транспорта

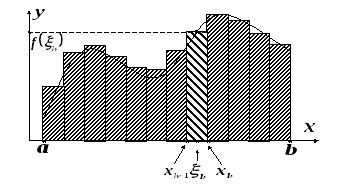
* [Неопределенный и определенный интегралы. Учебное пособие](http://www.iprbookshop.ru/10723.html)

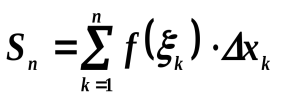
Малахов А.Н.

2009, Евразийский открытый институт

**Краткий теоретический материал**

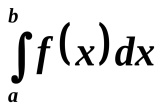
## 1. Понятие определенного интеграла

П****усть дана функцияhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-0Ivnpt.png, определенная на отрезкеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-q0rv2F.png. Этот отрезок разобьем наhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-w8taWa.pngэлементарных отрезков, ширинойhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-5JYi89.png, гдеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-detB4b.png- номер отрезка. В каждом из этих элементарных отрезков выберем произвольную точкуhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-KvqPKx.png. Значение функции в этой точкеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-asR2JP.pngумножим на длину отрезкаhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-0K7seT.png, получим произведениеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-Agrpp5.png, равное площади выделенного прямоугольника (см. рисунок).

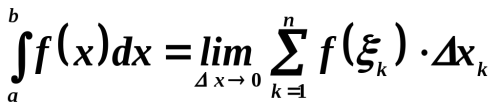
Далее составим сумму всех таких произведений (сумму всех таких прямоугольников): 

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** для функции https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-DCWlyv.pngна отрезкеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-wlby4Y.png.

***Определенным интегралом*** от функции https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-brO_Y1.pngна отрезкеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-LZr30d.pngназывается конечный предел ее интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина их стремится к нулю.

Определенный интеграл обозначается символом (читается: определенный***интеграл от https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-7n0OOZ.pngдоhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-j3PdfK.png***); https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-nIEkww.pngназывается подынтегральной функцией,https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-X6NGNl.png- переменной интегрирования,https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-3grpfj.png-***нижним***, https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-mkgjnZ.png-***верхним пределом интегрирования.***

Следовательно, по определению



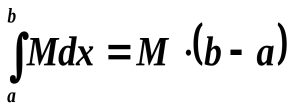
***Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-jMePGU.png, прямымиhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-bG5BVj.png,https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-91aaLP.pngи осьюhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-sQWPYc.png.***

**Теорема** (***существования определенного интеграла***).

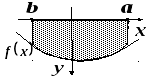
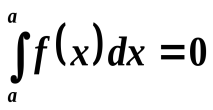
*Если функция https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-_EI7Zb.pngнепрерывна наhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-7BRDyF.png, то для нее существует определенный интеграл, т.е. существует предел интегральной суммы, составленный для функцииhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-4ZC7U4.pngнаhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-cRHCpq.png, и этот предел не зависит от способа разбиенияhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-FQTd02.pngна элементарные части и от выбора в них точекhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-WWIyLh.png, при условии, чтоhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-7K7k6n.pngи наибольшийhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-KFeUwA.png.*

Отметим, что определенный интеграл - это число, в то время как неопределенный интеграл - это функция.

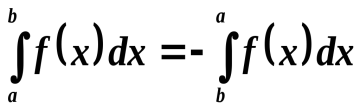
## 2. Основные свойства определенных интегралов

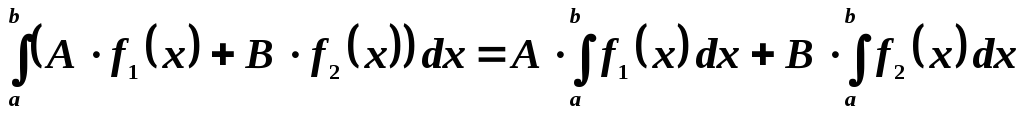
1. .

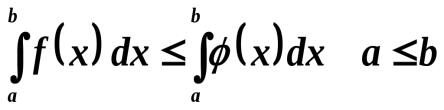
2. - интеграл от конечного числа алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов.

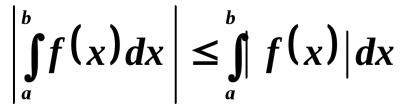
3.- определенный интеграл равен нулю при равенстве верхнего и нижнего пределов.

**Замечание.** До сих пор мы предполагали, что https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-A2OzhQ.pngиhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-vShvXD.png. Понятие определенного интеграла распространяется и на случай, когдаhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-UQulhL.pngиhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-mF1L06.png(см. рисунок).

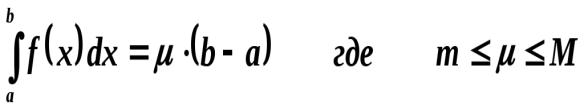
4. - при перемене верхнего и нижнего пределов интеграл меняет знак.

5. -постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

6. еслиhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-YsVLXl.png- неравенство можно почленно интегрировать.

7. - модуль от интеграла меньше или равен интегралу от модуля. Этот пункт отражает известную теорему:***Модуль суммы меньше или равен суммы модулей.***

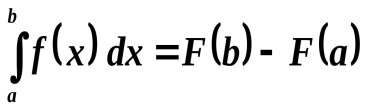
***\Теорема о среднем***. Если функция https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-PWaNKI.pngинтегрируема на отрезкеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-W6fweZ.pngи для всехhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-wrlYfs.pngвыполняется неравенствоhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-rNdGbO.png, то



## 3. Формула Ньютона-Лейбница

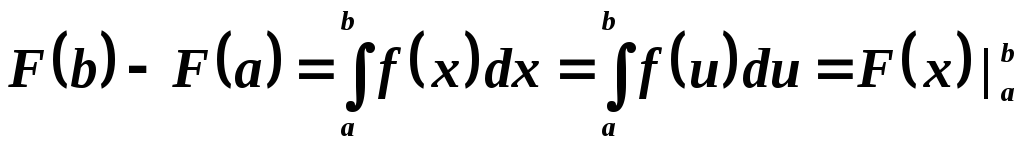
Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы очень сложно.

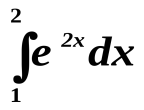
Ньютон и Лейбниц доказали теорему, связывающую два важных понятия математического анализа - интеграла и производной. Эта теорема выражается соотношением (***формула Ньютона-Лейбница***)

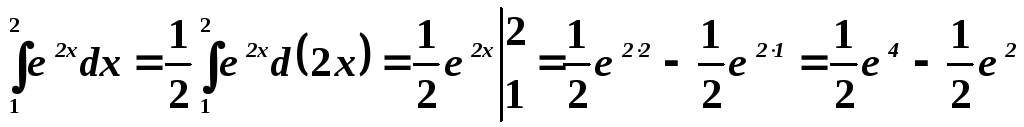


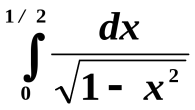
Таким образом, для того чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции https://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-3Gqpw7.pngна отрезкеhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-NWErgd.png, надо найти ее первообразную функциюhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-ooyUJi.pngи взять разностьhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-8uxzq0.pngзначений этой первообразной на концах отрезкаhttps://studfile.net/html/2706/202/html_TMUd70ec67.QKbK/img-bBs74s.png.

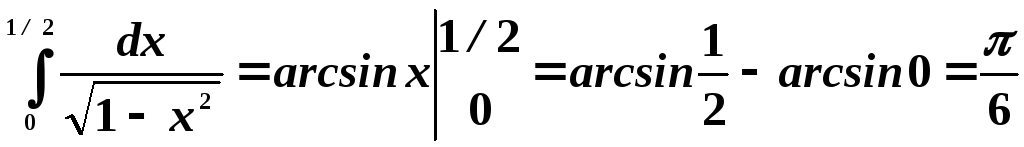
Еще раз отметим, что определенный интеграл это число, в то время как неопределенный - это функция. Поэтому совершенно все равно, по какой переменной (букве) ведется интегрирование



Например, вычислить интеграл . Имеем



Или, вычислить интеграл . Имеем



Приведем несколько примеров вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница для разъяснения.

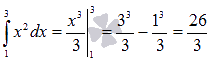
*Пример.*

Вычислить значение определенного интеграла формула по формуле Ньютона-Лейбница.

*Решение.*

Для начала отметим, что подынтегральная функция формула непрерывна на отрезке *[1;3]*, следовательно, интегрируема на нем. (Об интегрируемых функциях мы говорили в разделе функции, для которых существует определенный интеграл).

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что для функции множество первообразных для всех действительных значений аргумента (следовательно, и для формула) записывается как формула. Возьмем первообразную при *C = 0*: формула.

Теперь осталось воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла: .

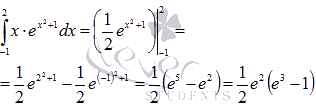
*Пример.*

По формуле Ньютона-Лейбница вычислите определенный интеграл формула.

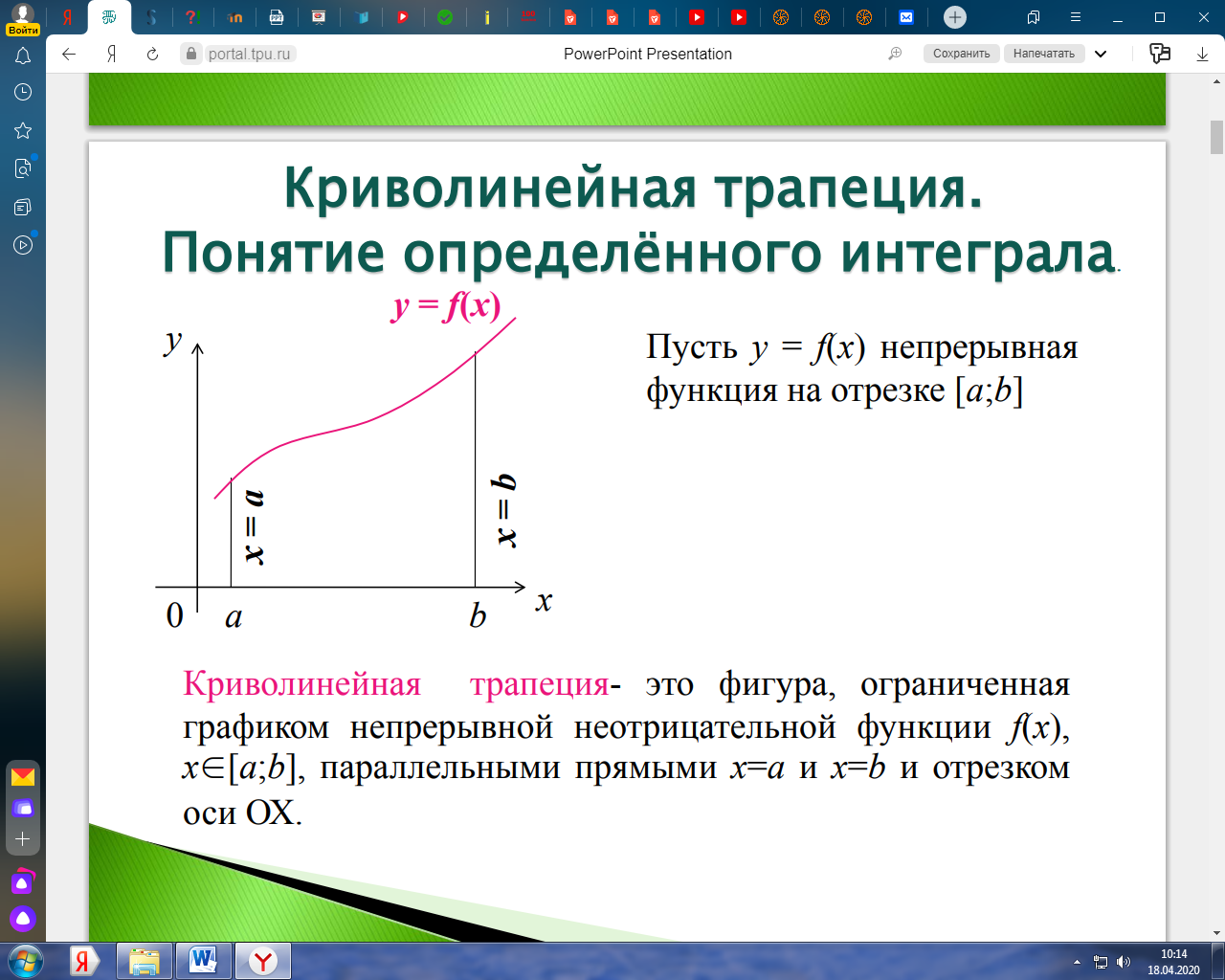
*Решение.*

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке *[-1;2]*, поэтому, интегрируема на нем.

Найдем неопределенный интеграл формула методом подведения под знак дифференциала:формула. Так мы получили множество всех первообразных функции формула для всех действительных *x*, следовательно, и для формула.

Возьмем первообразную при *С=0* и применим формулу Ньютона-Лейбница: 

## 3. Понятие криволинейной трапеции

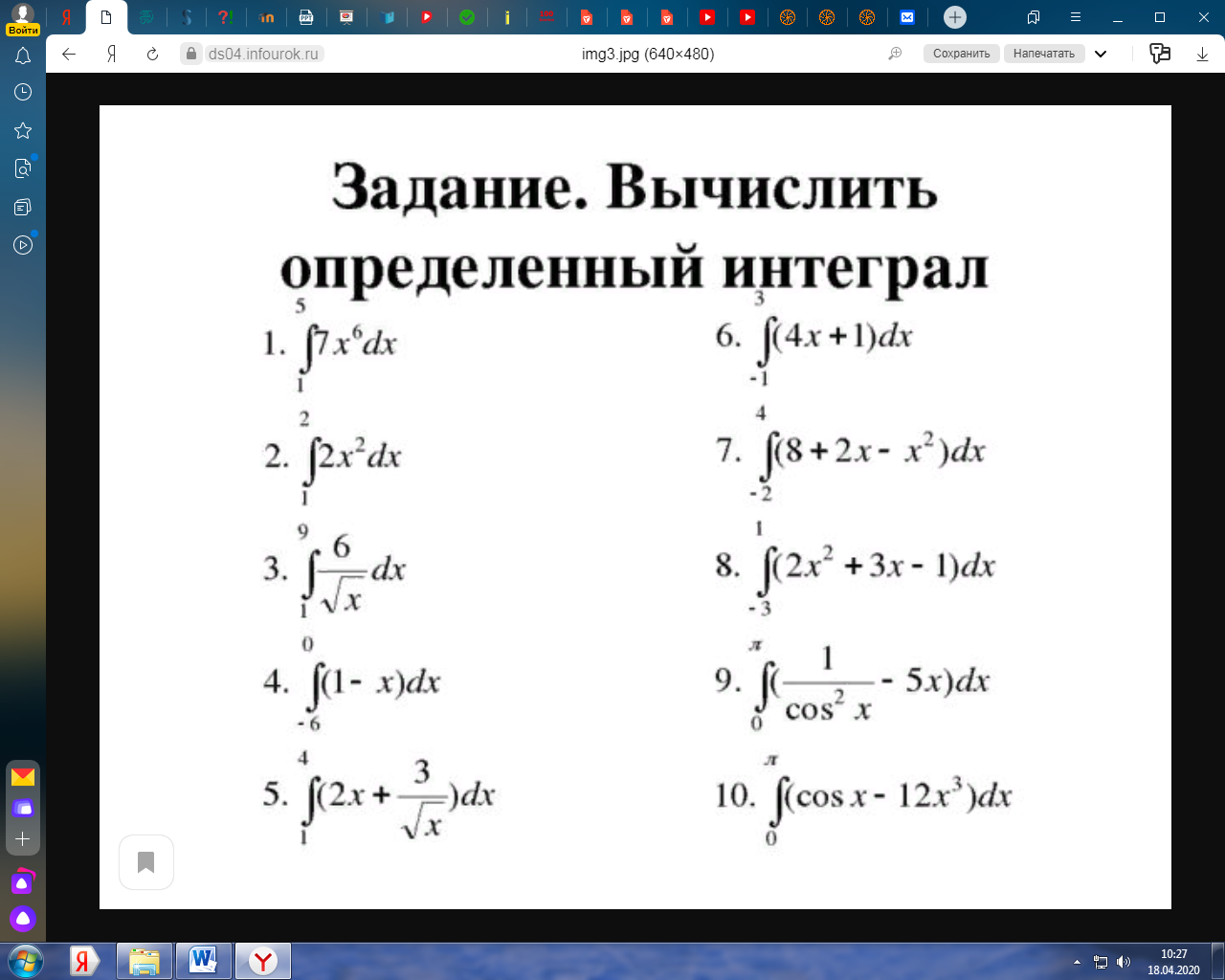


**Кроме того, краткая теоретическая информация в очень хорошем и доступном виде представлена на сайте https://portal.tpu.ru/SHARED/l/LAN2304/ycheba/Tab1/Opredelenni\_Integral.pdf**

**Контрольные (теоретические) вопросы для самопроверки по итогам изучения учебного материала:**

1. Дать определение интегральной суммы для заданной функции на данном отрезке, сделать поясняющий рисунок.
2. Дать определение определенного интеграла, сформулировать и показать на рисунке его геометрическую интерпретацию.
3. Сформулировать простейшие свойства определённых интегралов
4. Сформулировать теорему Ньютона – Лейбница
5. Дать определение криволинейной трапеции

**Контрольные (практические) задачи по итогам изучения учебного материала:**



Разработал:

Преподаватель математики А.А.Косенко